自由湍流的后期运动*

周培源　　蔡树棠

（数学力学系流体力学教研室）　（中国科学院力学研究所）

§1 引言

在运动时間相当久之后的均匀各向同性的湍流，由于运动能量的逐漸耗損而衰变成后期运动。在风洞实験里离开产生湍流的柵格相当远的下游也是后期均匀各向同性湍流运动的例子。这种后期湍流运动可用粘性流体的渦旋运动来說明[1]；我們并曾指出，这种湍流运动的湍性結構和組成湍流的渦旋的渦性結構有密切联系。在后期衰变时的湍流运动，湍流 Reynolds 数比較小，因而我們可以略去 Navier-Stokes 方程中的非綫性項而求得組成湍流运动的渦旋运动解。

自由湍流如尾流、噴注和半噴注等流动問題，和均匀各向同性湍流有类似的情形。流体离开了噴嘴或产生尾流的物体之后，仅在湍流漲落所引起的动量、能量与渦量等交换以及流体的粘性作用之下而逐漸衰变，并到达后期运动。自由湍流是一种具有剪应力的普通湍流运动，所以它的速度漲落或速度脈动須滿足速度漲落运动方程—Navier-Stokes 方程和 Reynolds 平均运动方程的差，以及連續方程[2]。在自由湍流后期运动的区域里，我們也假定湍流 Reynolds 数比較小，因此速度漲落方程中的非綫性項可以略去，但是在这个区域內平均流动速度对坐标的梯度依旧存在。解速度漲落方程的另一个近似是：考虑到組成湍流的渦旋的尺度比較小，所以在一个整个渦旋运动的范圍內，湍流的平均运动速度和速度对坐标的梯度都可以看作是和在这个范圍內的坐标变化无关。

在以上兩个条件之下，我們来求速度漲落方程的一种特殊解，这种解是由兩种湍流度不同的渦旋运动所組成：一种代表均匀各向同性湍流的渦旋运动，而这种运动的湍流度比較高；另一种为与湍流平均速度梯度有关的渦旋运动，而这种运动的湍流度比較低。从这个速度漲落解我們用以前所采用的平均方法[1]計算得在湍流中任一点的 Reynolds 应力張量，張量的一部分分量代表漲落速度分量平方的平均值，另一部分分量为湍流平均流动中的 Reynolds 剪应力，而这个剪应力和平均流动的速度梯度成正比。这样一个剪应力和平均速度梯度的綫性关系以前在用求二元速度关联的方法处理速度漲落方程时导出[3]，或从物理概念出发予以假定过，并可以用来說明一些自由湍流中的平均速度分布[4],[5],[6]。

后期自由湍流运动的实験量度还比較少。为此在本論文的§3中我們把§2的普通結果应用到二元尾流的后期运动上去，并以此計算出湍流中的平均速度分布，速度漲落平方的平均值以及 Reynolds 剪应力。为使实験情况和理論的条件相符合，我們在尾流中置

* 1958年3月25日收到。

放一个柵格,柵格的平面是和尾流的对称平面成垂直。柵格的作用在于产生一个均匀各向同性的湍流场,而这个湍流场的湍流度在同一点比在柵格前面物体所产生的尾流中的湍流度要高。这样計算出来的理論数值可和实驗的結果相比較。

根据現在二元尾流在柵格影响下的速度漲落解也可以推广到兩点之間的速度关联函数的計算,而理論結果也可用实驗的方法来檢驗。

最后,我們討論了二元湍性尾流后期运动問題解的近似条件以及用实驗方法来檢驗理論計算結果的問題。

§2 湍流漲落速度方程的渦旋运动解

我們用 x_i, t 代表空間和时間的坐标, U_i 代表湍流运动的平均速度, w_i 为速度漲落, $\tilde{\omega}$ 为压力漲落。速度漲落所滿足的漲落方程与連續方程可分别写作[2]:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial w_i}{\partial t}+U_\beta w_{i,\beta}+(w_i w_\beta)_{,\beta}+w_\beta U_{i,\beta}=-\frac{1}{\rho}\tilde{\omega}_{,i}+(\overline{w_i w_\beta})_{,\beta}+\nu\nabla^2 w_i,\\&w_{\beta,\beta}=0.\end{aligned}\right\}\tag{2·1}$$

上列方程式中的协变微商是对坐标 x_k 的偏微商。

在湍流运动中,組成湍流的渦旋的大小一般要比湍流平均运动的尺寸为小。因此在流体中某一 P_0 点 $(x_i=x_{0i})$ 的附近,在解上列运动方程的时候,我們近似地采用平均速度和它的梯度在 P_0 的数值,卽令

$$U_\beta=U_{0\beta},\qquad U_{i,\beta}=U_{0i,\beta}.\tag{2·2}$$

換句話說,我們假定在繞着 P_0 点的一个渦旋的运动范圍內,湍流的平均运动速度与它对坐标的梯度是和在这个領域內的坐标变化无关。为此速度漲落方程可用下列近似式代替,

$$\frac{\partial w_i}{\partial t}+U_{0\beta}w_{i,\beta}+(w_i w_\beta)_{,\beta}+w_\beta U_{0i,\beta}=-\frac{1}{\rho}\tilde{\omega}_{,i}+(\overline{w_i w_\beta})_{,\beta}+\nu\nabla^2 w_i.\tag{2·3}$$

我們現在只討論自由湍流的后期运动。在这时期的湍流运动,湍流 Reynolds 数比較小,也就是,流体的湍流度比較低,所以运动方程(2·3)中的速度漲落非綫性項可以略去,卽,

$$\frac{\partial w_i}{\partial t}+U_{0\beta}w_{i,\beta}+w_\beta U_{0i,\beta}=-\frac{1}{\rho}\tilde{\omega}_{,i}+\nu\nabla^2 w_i.\tag{2·4}$$

現在引进下列坐标变换,

$$\left.\begin{aligned}&z_i=x_i-x_{0i},\ x_{0i}=\int_{t_0}^{t}U_{0i}dt=\int_{t_0}^{t}U_i(x_{01},x_{02},x_{03},t)dt;\\&t=t.\end{aligned}\right\}\tag{2·5}$$

坐标 z_i 也可以被近似地解释作在和平均流动 U_{0i} 一同运动的一个坐标系中的坐标, P_0 点是这个坐标系的原点。这样,速度漲落运动方程和連續方程可写成:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial w_i}{\partial t}+w_\beta U_{0i,\beta}=-\frac{1}{\rho}\tilde{\omega}_{,i}+\nu\nabla^2 w_i;\\&w_{\beta,\beta}=0.\end{aligned}\right\}\tag{2·6}$$

在上列方程中的协变微商是对坐标 z_i 的偏微商；我們在(2·3)和(2·6)中为簡化書写手續起見用同样的微分符号，但它們有不同的物理意义。在以对 t 偏微商的一項中，坐标 z_i 就当作常数处理。

我們假定速度漲落方程的解可以分成兩部分：一部分 $w_i^{(0)}$ 代表均匀各向同性的湍流运动，另一部分 $w_i^{(1)}$ 是和平均速度梯度有关的渦旋运动，并再作这样的实驗佈置使前一种的流动比后一种的要大，卽：

$$w_i = w_i^{(0)} + w_i^{(1)}, \quad \text{而} \quad w_i^{(1)} < w_i^{(0)}. \tag{2·7}$$

函数 $w_i^{(0)}$ 与 $w_i^{(1)}$ 分别满足下列兩組运动方程：

$$\frac{\partial w_i^{(0)}}{\partial t} = \nu \nabla^2 w_i^{(0)}, \quad w_{\beta,\beta}^{(0)} = 0; \tag{2·8}$$

$$\frac{\partial w_i^{(1)}}{\partial t} + w_\beta^{(0)} E_{i\beta} = -\frac{1}{\rho}\tilde{\omega}_{,i} + \nu \nabla^2 w_i^{(1)}, \quad w_{\beta,\beta}^{(1)} = 0. \tag{2·9}$$

在(2·9)中我們用 $E_{i\beta}$ 代表 $U_{0i,\beta}$ 并根据(2·7)条件略去 $w_\beta^{(1)} E_{i\beta}$ 項。

現在引进速度与压力漲落的 Fourier 换式[7]，

$$\left.\begin{aligned} \varphi_i^{(0)} &= \frac{1}{8\pi^3}\iiint w_i^{(0)} e^{-\iota k_\alpha z_\alpha}(dz)^3; \\ \varphi_i^{(1)} &= \frac{1}{8\pi^3}\iiint w_i^{(1)} e^{-\iota k_\alpha z_\alpha}(dz)^3, \ \Pi = \frac{1}{8\pi^3}\iiint \tilde{\omega} e^{-\iota k_\alpha z_\alpha}(dz)^3. \end{aligned}\right\} \tag{2·10}$$

$$(\iota = \sqrt{-1})$$

于是运动方程組(2·8)和(2·9)轉換成：

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_i^{(0)} = -\nu k^2 \varphi_i^{(0)}, \quad k_\beta \varphi_\beta^{(0)} = 0; \tag{2·11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_i^{(1)} + \varphi_\beta^{(0)} E_{i\beta} = \frac{\iota}{\rho} k_i \Pi - \nu k^2 \varphi_i^{(1)}, \ k_\beta \varphi_\beta^{(1)} = 0. \tag{2·12}$$

求矢量 k_i 和(2·12)中运动方程的內积，并因(2·12)中連續方程的关系，得

$$k_\alpha \varphi_\beta^{(0)} E_{\alpha\beta} = \frac{\iota}{\rho} k^2 \Pi, \quad \text{其中} \quad k^2 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2. \tag{2·13}$$

因此(2·12)簡化为

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi_i^{(1)} + \varphi_\beta^{(0)} E_{i\beta} = \frac{k_i k_\gamma}{k^2}\varphi_\beta^{(0)} E_{\gamma\beta} - \nu k^2 \varphi_i^{(1)}. \tag{2·14}$$

組成均匀各向同性湍流后期运动的軸对称渦旋运动解[1]在湍譜空間中，卽相当于(2·11)的解，可用下列函数表出[8]

$$\varphi_i^{(0)} = \varphi_i^{(0)}(k, P, l) = -\iota A l_\alpha l_j l_\alpha \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) e^{\iota k_\alpha P_\alpha} \cdot e^{-\nu k^2 (t - t_0)}, \tag{2·15}$$

其中 A 是一个积分常数，l_i 代表軸对称渦旋軸綫的方向余弦，P_i 为渦旋中心在以 P_0 点为原点的坐标系中的坐标故是三任意参数。

有了 $\varphi_i^{(0)}$ 的解后，得到方程式(2·14)的解为

$$\varphi_i^{(1)} = -e^{-\nu k^2(t-t_0)} \int_{t_0}^{t} \varphi_\beta^{(0)} E_{\gamma\beta}\left(\delta_{i\gamma} - \frac{k_i k_\gamma}{k^2}\right) e^{\nu k^2(t-t_0)}\, dt. \tag{2·16}$$

如果函数 $E_{\gamma\beta}$ 是和时間无关，則上式簡化成

$$\varphi_i^{(1)} = \varphi_i^{(1)}(k,P,l) = -\varphi_\beta^{(0)} E_{\gamma\beta}\left(\delta_{i\gamma} - \frac{k_i k_\gamma}{k^2}\right)(t-t_0). \tag{2·17}$$

从湍譜空間中的兩个解 (2·15) 和 (2·17) 我們可用(2·10)的反換式計算出速度漲落 $w_i^{(0)}$ 和 $w_i^{(1)}$ 为坐标 z_i, t 的显函数[7]:

$$\left.\begin{aligned} w_i^{(0)} &= \iiint \varphi_i^{(0)} e^{\iota k_\alpha z_\alpha} (dk)^3, \\ w_i^{(1)} &= \iiint \varphi_i^{(1)} e^{\iota k_\alpha z_\alpha} (dk)^3. \end{aligned}\right\} \tag{2·18}$$

我們再求 Reynolds 应力 $\tau_{ij} = -\rho \overline{w_i w_j}$ 中在 P_0 点 $(z_i=0)$ 的二元速度关联函数 $\overline{w_i w_j}$。这个速度漲落乘积的平均值是根据这样的图案計算得来：組成湍流的軸对称渦球可在空間的任何地方而它的对称軸綫在空中可有任意的方向[1]，即：

$$\overline{w_i w_j} = \frac{n}{4\pi} \iiint (dP)^3 \iint d\Omega\, w_i w_j, \tag{2·19}$$

其中 n 代表在單位体积中的渦旋数目。以速度 w_i 的兩部分自 (2·7) 代入 (2·19) 并略去最小的一項，則得

$$\overline{w_i w_j} = \overline{w_i^{(0)} w_j^{(0)}} + \overline{w_i^{(0)} w_j^{(1)}} + \overline{w_i^{(1)} w_j^{(0)}}. \tag{2·20}$$

把(2·18)的 $w_i^{(0)}$ 代入(2·20)右边的第一項，就有

$$\overline{w_i^{(0)} w_j^{(0)}} = \frac{n}{4\pi} \iiint (dP)^3 \iint d\Omega \iiint \varphi_i^{(0)}(k,P,l)\, e^{\iota k_\alpha z_\alpha} (dk)^3 \iiint \varphi_j^{(0)}(k',P,l)\, e^{\iota k'_\beta z_\beta} (dk')^3. \tag{2·21}$$

用 $\varphi_i^{(0)}(k,P,l)$ 的显函数自(2·15)代入(2·21)并經过計算，得

$$\overline{w_i^{(0)} w_j^{(0)}} = \frac{8}{15} n\pi^2 A^2 \left[\frac{\pi}{2\nu(t-t_0)}\right]^{5/2} \delta_{ij}. \tag{2·22}$$

同样的从(2·17)平均值 $\overline{w_i^{(0)} w_j^{(1)}}$ 可写成

$$\overline{w_i^{(0)} w_j^{(1)}} =$$

$$= \frac{n}{4\pi} \iiint (dP)^3 \iint d\Omega \iiint \varphi_i^{(0)}(k',P,l)(dk')^3 \iiint \left[-\varphi_\beta^{(0)} E_{\gamma\beta}\left(\delta_{j\beta} - \frac{k_j k_\gamma}{k^2}\right)(t-t_0)\right](dk)^3. \tag{2·23}$$

再把 $\varphi_i^{(0)}$ 的函数从(2·15)代入上式并进行計算，乃得

$$\begin{aligned} \overline{w_i^{(0)} w_j^{(1)}} &= -\frac{2n}{(15)^2}(2\pi)^4 A^2 (t-t_0) \frac{3}{8}\sqrt{\pi} \frac{1}{[2\nu(t-t_0)]^{5/2}} (6E_{ji} + E_{ij}) = \\ &= -\frac{2n\pi^3 A^2}{75\nu} \left[\frac{\pi}{2\nu(t-t_0)}\right]^{3/2} (6U_{0j,i} + U_{0i,j}). \end{aligned} \tag{2·24}$$

从(2·20),(2·23)和(2·24),关联函数 $\overline{w_i w_j}$ 有下列形式:

$$\overline{w_i w_j}=-\frac{1}{\rho}\tau_{ij}=\frac{8}{15}n\pi^2A^2\left[\frac{\pi}{2\nu(t-t_0)}\right]^{5/2}\delta_{ij}-\frac{14}{75\nu}n\pi^3A^2\left[\frac{\pi}{2\nu(t-t_0)}\right]^{3/2}(U_{0j,i}+U_{0i,j}). \tag{2·25}$$

上列公式証明湍流中的 Reynolds 剪应力是和平均流速的梯度成正比。这样的結果也可以从其他方面考虑获得[4],[5],[6]。

§3 二元湍性尾流同时在栅格影响下的后期衰变运动

我們现在把上节的普通理論来解二元湍性尾流的运动問題。为使理論与实驗情况相符合,我們在物体的后面置放一个栅格,栅格的平面是和尾流的对称平面成正交。这样的一个栅格在它的下游产生一个均匀各向同性的湍流场。在我們計算湍流平均速度及 Reynolds 应力張量的流场离栅格比物体要近,所以栅格所产生的湍流度要比物体所产生的要高。不过我們进行計算的地方都离物体与栅格比較远,故在我們所討論的問題是屬于后期衰变运动的范疇。现在我們所考虑的尾流是二元的、定常的。如同一般書上一样[9]以 Ox 軸与尾流的对称軸平行,以 U_x 代表沿 Ox 軸的平均速度分量,U_y 为沿 Oy 軸的分量,沿 Oz 軸的平均速度分量 U_z 則因对称关系等于零。不恆等于零的定常平均运动方程和連續方程可写为:

$$\left.\begin{aligned}&U_x\frac{\partial U_x}{\partial x}+U_y\frac{\partial U_x}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}\right)+\nu\nabla^2U_x,\\&U_x\frac{\partial U_y}{\partial x}+U_y\frac{\partial U_y}{\partial y}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{p}}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yy}}{\partial y}\right)+\nu\nabla^2U_y,\\&\frac{\partial U_x}{\partial x}+\frac{\partial U_y}{\partial y}=0.\end{aligned}\right\} \tag{3·1}$$

令 U_0 代表在物体上游較远处未受扰动的流体沿着 Ox 軸的速度,并以 U 代表在尾流中平均流动的速度亏損,則

$$U_x=U_0-U. \tag{3·2}$$

如在一般討論湍性尾流的情形一样,我們假定

$$U\ll U_0,\qquad U_y\ll U_0. \tag{3·3}$$

现在我們来討論 Reynolds 切应力 τ_{ij}(2·25) 的形式。由于在 §2 中所采取的 P_0 点是任意的,在計算 P_0 点的平均速度分配及其他数值时我們就可以略去坐标 (x_0,y_0,z_0) 的下标而用 (x,y,z) 来代表 P_0 的坐标。在我們計算平均流速的坐标系里 P_0 点是近似地以平均速度向下游位移。因此 P_0 点的坐标是和 t 有一个关系 (2·5)。这个关系根据(3·2)及(3·3)的近似条件是等于下列綫性关系:

$$x=U_0(t-t_0),\qquad y=z=0. \tag{3·4}$$

因此我們从(2·25)得

$$\left.\begin{aligned}
-\frac{1}{\rho}\tau_{xx}&=\overline{w_x^2}=\frac{5}{7}\frac{U_0^2\eta_0}{a^2}\left(\frac{a}{x}\right)^{5/2}+\frac{U_0\eta_0 a^{1/2}}{x^{3/2}}\frac{\partial U}{\partial x},\\
-\frac{1}{\rho}\tau_{xy}&=\overline{w_x w_y}=\frac{U_0\eta_0 a^{1/2}}{2x^{3/2}}\frac{\partial U}{\partial y},\\
-\frac{1}{\rho}\tau_{yy}&=\overline{w_y^2}=\frac{5}{7}\frac{U_0^2\eta_0}{a^2}\left(\frac{a}{x}\right)^{5/2}-\frac{U_0\eta_0 a^{1/2}}{x^{3/2}}\frac{\partial U}{\partial x},\\
-\frac{1}{\rho}\tau_{zz}&=\overline{w_z^2}=\frac{5}{7}\frac{U_0^2\eta_0}{a^2}\left(\frac{a}{x}\right)^{5/2},
\end{aligned}\right\}\tag{3·5}$$

其中 $$\eta_0=\frac{14}{74\nu^2}\frac{n\pi^4A^2}{a^{1/2}}\left(\frac{\pi U_0}{2\nu}\right)^{1/2}.$$

在上列 $\overline{w_x w_y}$ 的公式中，我們曾略去較小項 $\partial U_y/\partial x$；在 $\overline{w_y^2}$ 中則运用(3·1)中的連續方程把 $\partial U_y/\partial y$ 一項換成 $\partial U/\partial x$。

由于(3·3)的近似条件以及在(3·5)各式中 x 的数值較大，运动方程式(3·1)中的第一个方程如同处理一般的尾流問題一样可簡化成一个热傳导方程，

$$U_0\frac{\partial U}{\partial x}=(\nu_*+\nu)\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\quad\left(\nu_*=\frac{U_0\eta_0 a^{1/2}}{2x^{3/2}}\right),\tag{3·6}$$

其中 ν_* 是湍性似运动粘性系数，它的数值是(3·5) τ_{xy} 中 $\partial U/\partial y$ 項的系数；ν_* 的数值在湍流的流动区域内一般要比 ν 的数值为大，但是当 x 的值很大时，ν_* 趋向零作极限，而湍流运动也衰变成片流运动。

令 a 代表柵格的坐标幷引进一个新变量 η，η 是定义是：

$$\eta-\eta_a=\frac{1}{U_0}\int_a^x(\nu_*+\nu)\,dx=\eta_0\left[1-\left(\frac{a}{x}\right)^{1/2}\right]+\frac{\nu}{U_0}(x-a),\tag{3·7}$$

其中 η_a 代表函数 η 在 $x=a$ 的数值，η_0 已在(3·5)中定义。一般地説上列方程右边和 ν 成正比的一項，即由于流体片流运动作用的一項比前面的一項为小。但在 x 坐标的数值增加时，它要超过前項的数值。这説明离产生尾流的物体及柵格比較远的地方湍性尾流將衰变成为片流尾流。

在引进函数 η 作变量之后，运动方程(3·6)可写作：

$$\frac{\partial U}{\partial\eta}=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}.\tag{3·8}$$

如果我們知道下列边界条件：

当 $$x=a,\qquad \eta=\eta_a,\qquad U=f(y),\tag{3·9}$$

此处 $f(y)$ 为已知函数，則具有热傳导方程形式的(3·8)运动方程解是[10]

$$U=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\eta-\eta_a)}}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-\frac{(\xi-y)^2}{4(\eta-\eta_a)}}d\xi.\tag{3·10}$$

把上列函数积分出幷代入(3·5)各公式中，我們可以求得(3·5)中 Reynolds 应力各分量的函数。

§4　討論

根据湍性尾流在柵格影响之下的后期衰变运动解，(3·5)，(3·7) 和 (3·10)，我們必須回顧一下过去所采用的兩个近似条件是否和現在的解相符合。这兩个条件是：速度漲落的数值 w 必須比平均速度的数值为小；組成湍流渦旋的尺度比較小，因此在渦旋的范圍內平均速度对坐标的梯度可以当作和坐标的变化无关。这兩个条件可写成：

$$w \ll U, \quad \left|\frac{dU}{dy}\right| \ll \frac{U}{\lambda}. \tag{4·1}$$

在上式中 w 代表速度漲落的数值，U 即(3·10)中的平均速度亏損。从 η 在 (3·7) 中的解我們可以看出流体的运动可以分作湍流坊和片流坊兩部分。在湍流坊中代表湍流运动的 η 的第一項一般比代表片流运动的第二項为大，但这一湍流項在較大的 x 領域內是一个常数 η_0。如果 x 很大很大时，則第二項的値將超过第一項而使 η 和 x 成正比。这样湍性尾流就衰变成片流尾流。为使我們更清楚地認識到有关各物理量在湍流坊中有不同的大小起見，玆把从(3·5)，(3·7)和(3·10)得出的数値級別列成下表：

物理量	数値級
η	η_0
$\partial U/\partial x$	$Ua^{1/2}x^{-3/2}$
$\partial U/\partial y$	$U\eta_0^{-1/2}$
$\partial^2 U/\partial y^2$	$U\eta_0^{-1}$
$\frac{1}{\rho}\tau_{xy}$	$U_0U\eta_0^{1/2}a^{1/2}x^{-3/2}$
$\frac{1}{\rho}\partial\tau_{xy}/\partial y$	$U_0Ua^{1/2}x^{-3/2}$
λ	$U_0^{-1/2}(\nu x)^{1/2}$
w	$U_0\eta_0^{1/2}a^{1/4}x^{-5/4}$

把上表 $\partial U/\partial x$ 項与(3·5)式比較可知(3·5)式中的均匀各向同性湍流速度漲落的数值要比平均流速的速度所引起的漲落数值为大。这也符合 (2·7) 的近似条件的。因此在表中 w 的值只考慮到均匀各向同性湍流速度漲落的一項。

从上表我們也可以看出在速度漲落运动方程式 (2·1) 中 $w_2\partial U/\partial y$ 的一項是比 $\partial(\overline{w_1w_2})/\partial y$ 的值为大，故后者可以略去。在(4·1)中第一个不等式能成立是很明显的，故(2·1)中速度漲落的非綫性項可以略去；第二个不等式則由于 λ 在湍流坊內一般比 $\eta_0^{1/2}$ 为小故也能滿足。

本論文的湍性尾流的运动問題解在柵格下游的解是完整的。这个完整性的意义是：只要在边界上(柵格下游后期运动开始处可被認作边界)平均流速的数值 $f(y)$ 为已知，則尾流中柵格下游的平均速度及速度漲落平方平均值的显函数都可以計算出来。但是在現在的計算中函数 $f(y)$ 須用其他方法求得，而不是已知。故湍流后期运动开始前从包括柵格前的流动問題看来，本論文的計算是不完整的。在尾流中柵格上游的运动問題如果也

在后期衰变运动的范圍內可用运动方程(2·6)来解。在栅格下游本論文所討論的范圍之內我們也可运用(2·7),(2·15),(2·17)和(2·18)諸式求出兩个不同点之間的二元速度关联函数。

根据本論文的計算結果如平均速度分布、速度漲落平方平均值以及再从計算求得的二元速度关联函数都可用实驗来檢驗。特別需要指出的是,(3·7)式規定出从湍流运动衰变成片流运动的区域;这一点也可用实驗来肯定。

摘 要

具有剪应力的自由湍流到下游相当远的地点由于能量的逐漸耗損將衰变成为类似均匀各向同性湍流的后期运动。如同处理后一种流动問題一样,我們現在根据湍流是由渦旋所組成的概念来求自由湍流的后期运动解。求渦旋运动解的动力学的基础是湍流速度漲落方程。在后期湍流场中湍流 Reynolds 数比較小,故方程中的非綫性項可以略去。再考慮到組成湍流的渦旋尺寸比較小,在每个渦旋范圍內平均湍流速度和它的坐标梯度可以近似地認为和坐标的改变无关。我們求綫性化了之后的湍流速度漲落方程如下的近似解:漲落速度的一部分代表均匀各向同性湍流的后期运动;另一部分是和平均流速的坐标梯度成正比,后一部分要比前一部分为小。从这样的近似解得出的 Reynolds 剪应力是和平均流速的坐标梯度成正比。当作这一般解的特例我們求一个二元尾流的后期运动。在产生尾流的物体的后面还置放一个平面与尾流对称平面成垂直的栅格。这个栅格在它的下游可产生一个迭加在物体所产生的尾流场上的均匀各向同性的湍流场。我們的解是适用在离物体和栅格相当远处的后期运动,但此处的流场距栅格較近,所以栅格所产生的均匀各向同性湍流要比尾流的湍流度为高,因此一般解的近似条件是可以滿足的。本論文給出尾流平均流速和速度漲落平方平均值的解。这些理論結果都可以用实驗来檢驗。由于我們只討論自由湍流的后期运动,故在解平均流速方程式时也需要确定流场上游的边界条件。这一点須另外設法考慮。

参 考 文 献

[1] 周培源,蔡树棠,力学学报,1, 3—14, 1957.
[2] 周培源,中国物理学报,4, 1—33, 1940.
[3] 林家翘,清华大学科学报告,4, 419—450, 1947.
[4] Görtler, H., *Zeit. f. ang. Math. u. Mech.* 22, 244—254, 1942.
[5] 張国藩,中国物理学报,7, 176—191, 1948.
[6] 胡宁,中国物理学报,5, 1—29, 1944.
[7] Batchelor, G. K., *Theory of Homogeneous Turbuleuce*, 28—33, 1953.
[8] Phillips, O.M., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 52, 135—151, 公式 (4·13), 1956.
[9] Goldstein, S., *Modern Developments in Fluid Dynamics*, II, 581—586, 1938.
[10] Frank, P., *Riemann-Webers Differentialgleichangen der Physik*, 186—189, 1927.

FINAL STAGE MOTION OF FREE TURBULENCE

Chou Pei-yuan
(Faculty of Mathematics and Mechanics)
and
Tsai Shu-tang
(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

ABSTRACT

Due to the gradual energy decay the free turbulent shear flow far downstream resembles the final stage motion of homogeneous isotropic turbulence. As in the latter case we adopt the concept of vortex motion structure of turbulence to solve the present problem. The dynamical basis of vortex motion solution is the set of equations of turbulent velocity fluctuation. In the flow field of the final stage motion of free turbulence the Reynolds number of turbulence is comparatively small, hence the non-linear terms in the dynamical equations can be neglected. Furthermore the size of vortices which form the turblent flow is regarded small, so within the range of each vortex the mean turbulent velocity and its gradient can be considered to be independent of the changes of the space coordinates. We now seek the following approximate solution of the linearized equations of turbulent velocity fluctuation: one part of the turbulent velocity fluctuation represents the final stage motion of homogeneous isotropic turbulence, while the other is proportional to the gradient of mean velocity, the latter part being smaller than the former. From this approximate solution the shearing component of the Reynolds stress is found to be directly proportional to the gradient of mean velocity. As a special example of the general solution we consider the case of the two-dimensional wake. Within the wake we put, furthermore, a plane grid normal to the plane of symmetry of the wake. This grid then creates in its downward stream a homogeneous isotropic turbulence field superimposed upon that of the wake. Our solution is applicable to places far downstream both from the body which creates the wake and from the grid. Since the flow here is nearer to the grid, so the turbulence level of the homogeneous isotropic turbulence would be higher than that of the wake. Consequently the conditions of the general solution can be satisfied. The present paper presents the solutions of the mean velocity and the mean squares of turbulent velocity fluctuation of the wake. These theoretical results can all be tested by experiment. On account of that we only discuss the final stage motion of free turbulence, the question how to lay down the upstream boundary condition of the flow field when solving the differential equations of the mean flow needs further consideration by other methods.